Contrôle d'Analyse IV du 24 juin 2008
II année EEIGM-ENSGSI ; Enseignant : M. HABOUSSI

Durée : 3 heures
Les documents, autres que les formulaires distribués en cours, et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Trouver les bornes supérieure et inférieure de la fonction définie par $f(x,y) = 3xy - 3x^2 - y^3$ sur le domaine carré de sommets $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ et $(1,1)$.

Exercice 2

Dans l'espace muni du repère (O, xyz), on considère le champ vectoriel $\overrightarrow{F} = (y^2, -x^2)$
Calculer la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long :
a- du segment $[A, B]$ orienté de A vers B avec $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$.
b- du quart de cercle centré en O passant par A et B.
Que peut-on dire alors de $\overrightarrow{F}$?

Exercice 3

Dans l'espace muni du repère (O, xyz), on considère la surface S paramétrée par :

$$\begin{cases} x = rcost \\ y = rsint \\ z = f(r) \quad (r,t) \in [a,b] \times [0, 2\pi[\quad 0 < a < b \end{cases} \tag{1}$$

1. Exprimer l'aire de la surface $A(S)$ sous forme d'une intégrale simple.
2. Montrer que $A(S)$ peut se mettre sous la forme $A(S) = 2\pi l(\Gamma) x_G$ où $l(\Gamma)$ et x_G représentent respectivement la longueur et l'abscisse du centre d'inertie G de la courbe Γ d'équation $z = f(x)$.
3. Que représente S lorsque Γ a pour équation $(x-c)^2 + z^2 = R^2 (R < c)$? Déterminer alors $A(S)$.

Exercice4

Dans l'espace rapporté au repère $R = (O, xyz)$, considérons le champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M) = k\overrightarrow{OM}$ (k est une constante).

1. Le champ $\overrightarrow{F}(M)$ dérive t-il d'un potentiel scalaire ou vectoriel ? Si oui, donner ce potentiel.